ФИЗИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
«НАУКА. ИННОВАЦИИ. ТЕХНОЛОГИИ», №1, 2018

УДК 517.95

Сурнева О.Б. [Surneva O.B.],
Яновская О.С. [Yanovskaya O.S.]

ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ КАК УСЛОВИЕ СОВМЕСТНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Parabolic equation with exponential nonlinearity as the condition of joint venture linear system

Рассматривается попытка построить $2+1$ – мерную нелинейную модель, являющуюся условием совместности системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Полученное уравнение связано с операторной L, A – парой и уравнением Лакса, когда оператор L содержит дифференцирование только по одной переменной и параметрически зависит от двух дополнительных переменных, дифференцирование по которым входит в оператор A. Исследуется возможность приведения линейной части к параболическому виду, а также преобразования координат приводящих к показательной нелинейности. Полученное уравнение имеет прикладное значение, так как его можно отнести к моделям типа диффузионных цепочек Тоды, основной особенностью которых является наличие у них нелинейностей экспоненциального типа. Такие уравнения описывают перенос пассивной примеси, например тепла в турбулентной среде с нелинейным турбулентным коэффициентом теплопроводности.

An attempt is made to construct a 2 + 1 - dimensional nonlinear model that is a condition for the compatibility of a system of two first – order linear differential equations. The resulting equation is related to the operator L, A to the pair and the Lax equation, when the operator L contains differentiation with respect to only one variable and depends parametrically on two additional variables differentiation with respect to which enters into the operator A. We study the possibility of reducing the linear part to a parabolic form, and also transformation of coordinates leading to exponential nonlinearity. The resulting equation has an applied value, since it can be attributed to Toda-type diffusion chain models, the main feature of which is the presence of nonlinearities of exponential type in them. Such equations describe the transfer of a passive impurity, for example, heat in a turbulent medium with a nonlinear turbulent thermal conductivity coefficient.

Ключевые слова: солитон, уравнение Лакса, оператор, нелинейное уравнение, пара Лакса, уравнение в частных производных.
Key words: soliton, Lax equation, operator, nonlinear equation, Lax pair, partial differential equation.

Введение

Большинство известных интегрируемых нелинейных моделей описывают поведение функций, зависящих от двух пространственно-временных переменных. В настоящее время большое развитие получила математическая теория, связанная с солитонами. С момента создания теории солитонов, при построении нелиненых уравнений в частных производных, часто используется операторная структра изоспектральной деформации или, как ее еще называют, уравнение Лакса

$$L_t = [L, A] = LA - AL, \tag{1}$$

которая при некоторых условиях эквивалентна условию совместности линейной системы

$$L\phi = \lambda\phi, \quad \phi_t = -A\phi, \tag{2}$$

где L, A – дифференциальные операторы со специальными свойствами, λ – собственное значение оператора L, $\phi(x,t,\lambda)$ – собственная функция оператора L.

Теория солитонов породила теорию интегрируемых систем, получившую большое развитие. Попытка распространить эту теорию на $2+1$, $3+1$-мерную ситуацию в последнее время привела к заметным успехам. Некоторые примеры были описаны в работах О.И. Богоявленского [1], Санюк В.И. [2] и другими [3–6].

Интересные результаты можно получить если оператор L параметрически зависит от дополнительных переменных, дифференцирование по которым входит в оператор A, но не входят в оператор L [1].

Материалы и методы исследований

Продемонстрируем возможность построения $2+1$-мерного дифференциального уравнения в частных производных из операторного уравнения Лакса (1). Будем рассматривать класс функций, зависящих от трех переменных, оператор L задает дифференцирование только по переменной x и параметрически зависит от дополнительной переменной y, дифференцирование по которой входит в оператор A. Следует ожидать, что собственные числа λ уже не являются постоянными, а представляют функции $\lambda(y)$. В силу этого с течением времени возможна их многозначность. Как, например [1], двумерное взаимодействие волны Римана, распространяющейся по оси y, с длинными волнами, распространяющимися по оси x. В некотором приближении такое явление наблюдается в волнах на поверхности моря, а так же при возникновении ударной волны.

ЛЕММА. *Для того чтобы коммутатор* $[L, A]$ *двух операторов вида*

$$L = a_0 \frac{\partial}{\partial x} + U \tag{3}$$

$$A = \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_0 \frac{\partial}{\partial y} + V, \tag{4}$$

где $a_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix}$, $\beta_0 = \begin{pmatrix} 2\alpha k + \beta & 0 \\ ak & \beta \end{pmatrix}$, $\gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ – постоянные матрицы, $\alpha, \grave{\alpha}, \beta, \gamma$

k – произвольные постоянные,

$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ – функциональные матрицы, $v_{ij}(x,y,t),\, u_{ij}(x,y,t)\quad (i,j=1,2)$ – произвольные функции трех переменных *x, y* и *t,* не содержал операторов дифференцирования

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},$$

необходимо и достаточно, чтобы функции v_{12}, v_{21} удовлетворяли следующим равенствам

$$v_{12}=ku_{12},\ \ v_{21}=ku_{21}+\frac{a}{2\alpha}(v_{11}+ku_{22}-v_{22}-ku_{11}). \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Покажем, что такой выбор операторов обуславливает равенство нулю коэффициентов при дифференциалах

$\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}$. Раскроем коммутатор

$$[L,A]=LA-AL=\left(a_0\frac{\partial}{\partial x}+U\right)\left(\beta_0\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_0\frac{\partial}{\partial y}+V\right)-\left(\beta_0\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_0\frac{\partial}{\partial y}+V\right)\left(a_0\frac{\partial}{\partial x}+U\right)=$$
$$=(a_0\beta_0-\beta_0a_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(a_0\gamma_0-\gamma_0a_0)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}+(a_0V-Va_0+U\beta_0-\beta_0U)\frac{\partial}{\partial x}+a_0\frac{\partial V}{\partial x}+$$
$$+(U\gamma_0-\gamma_0U)\frac{\partial}{\partial y}+UV-\beta_0\frac{\partial U}{\partial x}-\gamma_0\frac{\partial U}{\partial y}-VU.$$

Очевидно, надо проверить вид коммутационных связей при операторах дифференцирования

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}:\ a_0\beta_0-\beta_0a_0=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ a & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\alpha k+\beta & 0\\ ak & \beta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\alpha k+\beta & 0\\ ak & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ a & -\alpha\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha[2\alpha k+\beta] & 0\\ a[2\alpha k+\beta]-\alpha ak & -\alpha\beta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}[2\alpha k+\beta]\alpha & 0\\ ak\alpha+\beta a & -\beta\alpha\end{pmatrix}=0.$$

Так как матрица γ_0 – диагональная, то выражения

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}:\quad a_0\gamma_0-\gamma_0a_0=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}:\quad U\gamma_0-\gamma_0U=0$$

Осталось проверить только коэффициент при $\frac{\partial}{\partial x}$, для этого найдем

$$a_0V - Va_0 = \begin{pmatrix} -av_{12} & 2\alpha v_{12} \\ av_{11} - 2\alpha v_{21} - av_{22} & av_{12} \end{pmatrix},$$

$$U\beta_0 - \beta_0 U = \begin{pmatrix} aku_{12} & -2\alpha ku_{12} \\ 2\alpha ku_{21} + aku_{22} - aku_{11} & -aku_{12} \end{pmatrix},$$

тогда коэффициент $(a_0V - Va_0 + U\beta_0 - \beta_0 U)$ будет равен нулю при условии что выполняется (5).

Обратное утверждение доказывается простой проверкой.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение на функцию $u(x, y, t)$

$$\alpha q_x + \frac{\alpha^2 k}{2}(\ln u)_{xx} - \frac{\gamma^2}{2k}(\ln u)_{yy} = \frac{a}{2\alpha}(u_z + \gamma u_y) + \frac{\gamma}{2k}(\ln u)_{yz} - \frac{\alpha}{2}(\ln u)_{xz} \quad (6)$$

обладает парой Лакса с операторами L и A вида

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y - \frac{\alpha}{2}(\ln u)_x & u \\ \frac{a^2}{4\alpha^2}u + \frac{\gamma a}{2\alpha k}(\ln u)_y & -\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y - \frac{\alpha}{2}(\ln u)_x \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha k + \beta & 0 \\ ak & \beta \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y} + \begin{pmatrix} q & ku \\ \frac{a^2 k}{4\alpha^2}u - \frac{a}{2\alpha}(\ln u)_z & q + (\ln u)_z \end{pmatrix}. \quad (8)$$

где оператор $(\alpha k + \beta)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}$, $q(x, y, t)$ – произвольная функция, $\alpha, \beta, \gamma, k, a,$ – произвольные параметры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим частный случай, когда оператор L не содержит дифференцирования по у и имеет ту же структуру, которая использовалась в лемме. Запишем уравнение на собственные значения $L\varphi = \lambda\varphi$, где $\lambda(y)$ параметрически зависит от y, но не зависит от t, и уравнение, описывающее динамику вектор-функции $\varphi(x, y, t, \lambda) = (\varphi_1(x, y, t, \lambda), \varphi_2(x, y, t, \lambda))^T$(T – означает транспонирование) $\varphi_t, = -A\varphi$. Распишем уравнения с учетом структуры операторов

$$\left(a_0\frac{\partial}{\partial x} + U\right) = \lambda\varphi, \qquad a_0\varphi_x = \lambda\varphi - U\varphi,$$

$$\varphi_t = -\left(\beta_0\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_0\frac{\partial}{\partial y} + V\right)\varphi \qquad \text{или} \qquad \varphi_t = -\beta_0\varphi_x - \gamma_0\varphi_y - V\varphi.$$

Продифференцируем первое равенство по t

$$a_0\varphi_{xt} = \lambda\varphi_t - U_t\varphi - U\varphi_t,$$

и подставим значения φ_t из второго равенства системы

$$a_0[\beta_0\varphi_x+\gamma_0\varphi_y+V\varphi]_x-\lambda[\beta_0\varphi_x+\gamma_0\varphi_y+V\varphi]-U_t\varphi+U[\beta_0\varphi_x+\gamma_0\varphi_y+V\varphi]=0.$$

Так как $\lambda\varphi=a_0\varphi_x+U\varphi,\quad \lambda\varphi_x=a_0\varphi_{xx}+U_x\varphi+U\varphi_x,\ \lambda\varphi_y=a_0\varphi_{xy}+U_y\varphi+U\varphi_y$, то выполняя подстановку этих значений можно избавиться от параметра λ:

$$a_0[\beta_0\varphi_x+\gamma_0\varphi_y+V\varphi]_x-\beta_0[a_0\varphi_{xx}+U_x\varphi+U\varphi_x]-\gamma_0[a_0\varphi_{xy}+U_y\varphi+U\varphi_y]-$$
$$-V[a_0\varphi_x+U\varphi]-U_t\varphi+U[\beta_0\varphi_x+\gamma_0\varphi_y+V\varphi]=0,$$

сгруппируем элементы с $\varphi_{xx},\ \varphi_{xy},\ \varphi_x,\ \varphi_y$

$$[a_0\beta_0-\beta_0a_0]\varphi_{xx}+[a_0\gamma_0-\gamma_0a_0]\varphi_{xy}+[a_0V-Va_0-\beta_0U+U\beta_0]\varphi_x+[U\gamma_0-\gamma_0U]\varphi_y+$$
$$+[a_0V_x-\beta_0U_x-\gamma_0U_y-VU-U_t+UV]\varphi=0,$$

в силу выполнения выше сформулированной леммы, остается уравнение

$$a_0V_x-\beta_0U_x-\gamma_0U_y-VU+UV=U_t. \tag{9}$$

Распишем матричное уравнение (9) на систему, используя равенства (5)

$$u_{11t}=\frac{a}{2\alpha}u_{12}(v_{11}+ku_{22}-v_{22}-ku_{11})+\alpha v_{11x}-(2\alpha k+\beta)u_{11x}-\gamma u_{11y}, \tag{10}$$

$$(\ln u_{12})_t=ku_{11}+v_{22}-v_{11}-ku_{22}-(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_x-\gamma(\ln u_{12})_y, \tag{11}$$

$$u_{21t}=(v_{11}-v_{22}+ku_{22}-ku_{11})\left[u_{21}+\frac{a}{2\alpha}(u_{22}-u_{11})\right]-(\alpha k+\beta)u_{21x}+$$
$$+\frac{a}{2}(v_{11x}-ku_{22x}+v_{22x}-ku_{11x})-\gamma u_{21y}, \tag{12}$$

$$u_{22t}=-u_{12}\frac{a}{2\alpha}(v_{11}+ku_{22}-v_{22}-ku_{11})-\alpha v_{22x}-\beta u_{22x}-\gamma u_{22y}, \tag{13}$$

Полученная система имеет большое число свобод, поэтому с учетом равенства (11) определим дополнительные условия так чтобы

$$v_{11}+(\ln u_{12})_t+(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_x=v_{22}, \tag{14}$$

$$\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y+u_{22}=u_{11}. \tag{15}$$

Подставим найденные значения в оставшуюся систему (10), (12), (13)

$$\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_{yt}+u_{22t}=-\frac{a}{2\alpha}u_{12}((\ln u_{12})_t+(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_x+\gamma(\ln u_{12})_y)+\alpha v_{11x}-$$
$$-(2\alpha k+\beta)\left[\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_{yx}+u_{22x}\right]-\frac{\gamma^2}{k}(\ln u_{12})_{yy}-\gamma u_{22y}, \tag{16}$$

$$u_{21t}=-((\ln u_{12})_t+(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_x+\gamma(\ln u_{12})_y)\left[u_{21}-\frac{\gamma}{k}\frac{a}{2\alpha}(\ln u_{12})_y\right]-$$
$$-(\alpha k+\beta)u_{21x}+\frac{a}{2}(2v_{11x}-2ku_{22x}+(\ln u_{12})_{xt}+(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_{xx}-$$
$$-\gamma(\ln u_{12})_{yx})-\gamma u_{21y}, \tag{17}$$

$$u_{22t}=u_{12}\frac{a}{2\alpha}((\ln u_{12})_t+(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_x+\gamma(\ln u_{12})_y)-$$
$$-\alpha\{v_{11}+(\ln u_{12})_t+(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_x\}_x-\beta u_{22x}-\gamma u_{22y} \tag{18}$$

Найдем сумму (16) и (18) и выделим полные производные:

$$\left[\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y+2u_{22}+\alpha(\ln u_{12})_x\right]_t+\gamma\left[\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y+2u_{22}+\alpha(\ln u_{12})_x\right]_y+$$
$$+(\alpha k+\beta)\left[\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y+2u_{22}+\alpha(\ln u_{12})_x\right]_x=0,$$

что позволяет определить ранее неизвестную функцию u_{22}

$$u_{22}=-\frac{\gamma}{2k}(\ln u_{12})_y-\frac{\alpha}{2}(\ln u_{12})_x. \tag{19}$$

Выразим $v_{11x}-ku_{22}$ из (18)

$$v_{11x}-ku_{22x}=\frac{a}{2\alpha^2}[u_{12t}+(\alpha k+\beta)u_{12x}+\gamma u_{12y}]-(\ln u_{12})_{xt}-(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_{xx}-$$
$$-\frac{1}{\alpha}[u_{22t}+\left(\beta+\alpha k\right)u_{22x}+\gamma u_{22y}].$$

и выполним подстановку найденной функции (19)

$$v_{11x}-ku_{22x}=\frac{a}{2\alpha^2}[u_{12t}+(\alpha k+\beta)u_{12x}+\gamma u_{12y}]-\frac{1}{2}(\ln u_{12})_{xt}-$$
$$-\frac{1}{2}(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_{xx}+\frac{\gamma}{2\alpha k}[(\ln u_{12})_t+\left(\beta+2\alpha k\right)(\ln u_{12})_x+\gamma(\ln u_{12})_y]_y. \tag{20}$$

Найденное соотношение (20) подставим в (17) и умножим все члены на u_{12}

$$u_{12}u_{21t}=-(u_{12t}+(\alpha k+\beta)u_{12x}+\gamma u_{12y})\left[u_{21}-\frac{\gamma}{k}\frac{a}{2\alpha}(\ln u_{12})_y\right]+$$
$$+\frac{a^2u_{12}}{2\alpha^2}[u_{12t}+(\alpha k+\beta)u_{12x}+\gamma u_{12y}]+\frac{\gamma a u_{12}}{2\alpha k}[(\ln u_{12})_t+\left(\beta+\alpha k\right)(\ln u_{12})_x+$$

$$+\gamma(\ln u_{12})_y]_y-(\alpha k+\beta)u_{12}u_{21x}-\gamma u_{12}u_{21y}.$$

Тогда выделяя полные производные, имеем

$$\left(\partial_t+(\alpha k+\beta)\partial_x+\gamma\partial_y\right)\left[u_{12}u_{21}-\frac{a^2}{4\alpha^2}u_{12}^2-\frac{a\gamma}{2\alpha k}u_{12y}\right]=0,$$

в результате можно найти функцию u_{21}

$$u_{21}=\frac{a^2}{4\alpha^2}u_{12}+\frac{a\gamma}{2\alpha k}(\ln u_{12})_y \tag{21}$$

И так, в ходе преобразований системы (16–18) из (17) найдена функция u_{21}, а из (18) u_{22}, поэтому осталось единственное уравнение (16), связывающее две функции $u_{12}=u(x, y, t)$ и $v_{11}=q(x, y, t)$

$$\begin{gathered}\frac{ak}{\alpha}\left(\partial_t+(\alpha k+\beta)\partial_x+\gamma\partial_y\right)u_{12}=\\=2\alpha kq_x+\left(\partial_t+(2\alpha k+\beta)\partial_x+\gamma\partial_y\right)[k\alpha(\ln u_{12})_x-\gamma(\ln u_{12})_y].\end{gathered} \tag{22}$$

Для получения явного вида пары Лакса, соответствующей форме (3), (4) необходимо выполнить подстановку найденных значений функций (5), (14), (15), (19), (21), что дает:

$$\begin{gathered}v_{11}=q(x,y,t),\;\; u_{12}=u(x,y,t),\;\; v_{22}=q+(\ln u)_t+(\alpha k+\beta)(\ln u)_x,\\ v_{12}=ku,\;\; v_{21}=\frac{a^2k}{4\alpha^2}u-\frac{a}{2\alpha}((\ln u)_t+(\alpha k+\beta)(\ln u)_x),\\ u_{21}=\frac{a^2}{4\alpha^2}u+\frac{a\gamma}{2\alpha k}(\ln u)_y,\;\; u_{11}=\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y-\frac{\alpha}{2}(\ln u)_x,\;\; u_{22}=-\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y-\frac{\alpha}{2}(\ln u)_x.\end{gathered} \tag{23}$$

В результате получен вид матриц U, V операторов Лакса (7), (8), указанных в теореме 1.

Для компактности записи будем использовать комбинированную переменной так, что $\left(\alpha k+\beta\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}$, уравнение (22) преобразуется к виду:

$$\alpha q_x+\frac{\alpha^2k}{2}(\ln u)_{xx}-\frac{\gamma^2}{2k}(\ln u)_{yy}=\frac{a}{2\alpha}(u_z+\gamma u_y)+\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_{yz}-\frac{\alpha}{2}(\ln u)_{xz}. \tag{24}$$

Если в (22) выделить комбинированную производную $(\alpha k+\beta)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}+\gamma\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}$, то равенство (22), сохраняя при этом зависимость от трех переменных, примет вид:

$$\frac{ak}{\alpha}u_{12r}=2\alpha kvq_x+\left(\partial_r+\alpha k\partial_x\right)[k\alpha(\ln u_{12})_x-\gamma(\ln u_{12})_y]. \tag{25}$$

Полученное уравнение в частных производных имеет вид локального закона сохранения, при этом функция $q(x, y, t)$ является произвольной и может описывать некоторое внешнее возмущение. В последующих исследованиях будем считать произвольную функцию $q(x, y, t) = 0$, тогда уравнение (24) примет вид

$$\alpha^2 k(\ln u)_{xx} - \frac{\gamma^2}{k}(\ln u)_{yy} - \frac{\gamma}{k}(\ln u)_{yz} + \alpha(\ln u)_{xz} = \frac{a}{\alpha}(u_z + \gamma u_y). \quad (26)$$

Очевидно, имеет место следующее

СЛЕДСТВИЕ 1.

Уравнение (26) обладает парой Лакса с операторами L и A вида:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y - \frac{\alpha}{2}(\ln u)_x & u \\ \frac{a^2}{4\alpha^2}u + \frac{\gamma a}{2\alpha k}(\ln u)_y & -\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y - \frac{\alpha}{2}(\ln u)_x \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha k + \beta & 0 \\ ak & \beta \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y} + \begin{pmatrix} 0 & ku \\ \frac{a^2 k}{4\alpha^2}u - \frac{a}{2\alpha}(\ln u)_z & (\ln u)_z \end{pmatrix}. \quad (28)$$

где $(\alpha k + \beta)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}$, *α, β, γ, k, a – произвольные параметры.*

СЛЕДСТВИЕ 2.

Уравнение на функцию v(x, y, t)

$$\alpha^2 k v_{xx} + \alpha v_{xt} - \frac{\gamma^2}{k}v_{yy} - \frac{\gamma}{k}v_{yt} = \frac{a}{\alpha}e^v(v_t + \gamma v_y) \quad (29)$$

обладает парой Лакса с операторами L и A вида

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2k}v_y - \frac{\alpha}{2}v_x & e^v \\ \frac{a^2}{4\alpha^2}e^v + \frac{\gamma a}{2\alpha k}v_y & -\frac{\gamma}{2k}v_y - \frac{\alpha}{2}v_x \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$A = k\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y} + \begin{pmatrix} 0 & ke^v \\ \frac{a^2 k}{4\alpha^2}e^v - \frac{a}{2\alpha}v_t & v_t \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где α, γ, k, a – произвольные параметры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для получения нужного вида операторов достаточно в (26), (27) и (28) выполнить замену $\ln u(x, y, t) = v(x, y, t)$, где $v(x, y, t)$ – новая неизвестная функция, и положить параметр $\beta = -\alpha k$. В результате компоненты матриц преобразуются к виду:

$$u_{11}=\frac{\gamma}{2k}v_y-\frac{\alpha}{2}v_x,\quad u_{12}=e^v,\quad u_{21}=\frac{a^2}{4\alpha^2}e^v+\frac{a\gamma}{2\alpha k}v_y,\; u_{22}=-\frac{\gamma}{2k}v_y-\frac{\alpha}{2}v_x,$$

$$v_{11}=0,\quad v_{22}=v_t,\; v_{12}=ke^v,\quad v_{21}=\frac{a^2k}{4\alpha^2}e^v-\frac{a}{2\alpha}v_t,$$

т. е. получим вид (30) и (31).

Результаты исследований и их обсуждение

Полученное нелинейное уравнение (29) имеет линейную часть, содержащую как вторые так и смешанные производные. Выполним замену переменных так чтобы остались только вторые производные.

ТЕОРЕМА 2.

Уравнение (29), при $k > 0$, $\alpha, \gamma, a \in R$ сводится к параболическому квазилинейному уравнению вида

$$v_{\chi\chi}-v_{\varsigma\varsigma}=\frac{ak}{\alpha\gamma^2}e^v(\gamma v_\varsigma+v_\iota), \tag{32}$$

где $v = v(\chi, \varsigma, l)$ – неизвестная функция трех переменных,

$$\chi=\pm\frac{\gamma}{\alpha k}x,\; \varsigma=y,\; \iota=-\frac{1}{\alpha k}x-\frac{1}{\gamma}y+2t. \tag{33}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1.

Использование квадратичных форм. Рассмотрим левую часть уравнения (29). Ей соответствует квадратичная форма вида

$$Q=\frac{\alpha^2k}{2}\lambda_1^2+\frac{\alpha}{2}\lambda_1\lambda_3-\frac{\gamma^2}{2k}\lambda_2^2-\frac{\gamma}{2k}\lambda_2\lambda_3 \tag{34}$$

Методом Лагранжа приведем квадратичную форму (34) к каноническому виду $Q=\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2$, где $\mu_1 = m_1\lambda_1 + n_1\lambda_2 + p_1\lambda_3$, $\mu_2 = m_2\lambda_1 + n_2\lambda_2 + p_2\lambda_3$, $\mu_3 = p_3\lambda_3$, тогда

$$Q=m_1^2\lambda_1^2-n_2^2\lambda_2^2-2n_2p_2\lambda_2\lambda_3+2m_1p_1\lambda_1\lambda_3-(p_1^2-p_2^2-p_3^2)\lambda_3^2. \tag{35}$$

Для того чтобы квадратичная форма (35) имела такую же структуру, как и левая часть уравнения (29), необходимо, чтобы соблюдалось условие $p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0$, или $p_3^2 = p_1^2 - p_2^2$, тогда (35) после выполнения элементарных преобразований, примет вид

$$Q = m_1^2\lambda_1^2 - n_2^2\lambda_2^2 - 2n_2p_2\lambda_2\lambda_3 + 2m_1p_1\lambda_1\lambda_3 \tag{36}$$

Сравнивая коэффициенты при λ_1, λ_2, λ_3 в формулах (34) и (36), получим:

$$m_1 = \frac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{2}},\ n_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{2k}},\ p_1 = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}},\ p_2 = \frac{\sqrt{2k}}{4k}, \tag{37}$$

где $p_3^2 = p_1^2 - p_2^2 = 0$, а равенство (35) принимает вид

$$Q = \left(\frac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}\lambda_3\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2k}}\lambda_2 + \frac{\sqrt{2k}}{4k}\lambda_3\right)^2. \tag{38}$$

Для построения матрицы невырожденного аффинного преобразования необходимо выразить λ_1, λ_2, λ_3 через μ_1, μ_2, μ_3. Так как имеется только два соотношения вида:

$$\mu_1 = \frac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}\lambda_3,\ \mu_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{2k}}\lambda_2 + \frac{\sqrt{2k}}{4k}\lambda_3,$$

это не позволяет выразить λ_i, через μ_j.

Исследование показало, что квадратичная форма Q имеет вырожденный вид, следовательно, для приведения к нужному виду надо использовать другой подход.

2. **Специальная замена.** Проведем замену независимых переменных $v(x, y, t) \to v(\chi, \zeta, l)$ так, чтобы смешанные производные уничтожились. Так как в исследуемом уравнении отсутствует смешанная производная v_{xy}, то предположим, что две переменные не зависят от t, а третья зависит от всех трех переменных исходного уравнения, новые переменные будут иметь вид:

$$\chi = px, \qquad \varsigma = by, \qquad \iota = cx + dy + mt. \tag{39}$$

где $\{p, b, c, d, m\} \in R/\{0\}$. Определив частные производные новых переменных по старым, производные от неизвестной функции примут вид.

$$v_y = bv_\varsigma + dv_\iota,\ v_t = mv_\iota,$$

$$v_{xx} = p^2 v_{\chi\chi} + c^2 v_{\iota\iota} + 2pcv_{\chi\iota},\ v_{yy} = b^2 v_{\varsigma\varsigma} + d^2 v_{\iota\iota} + 2bdv_{\varsigma\iota}, \tag{40}$$
$$v_{y\iota} = dmv_{\iota\iota} + bmv_{\varsigma\iota},\ v_{x\iota} = cmv_{\iota\iota} + pmv_{\chi\iota}$$

Подставляя (40) в (29), получим:

$$\alpha^2 kp^2 v_{\chi\chi} + \left[\alpha^2 kc^2 - \frac{\gamma^2}{k}d^2 - \frac{\gamma}{k}dm + \alpha cm\right]v_{\iota\iota} + \left[2\alpha^2 kpc + \alpha pm\right]v_{\chi\iota} -$$
$$-\left[\frac{\gamma}{k}bm + 2\frac{\gamma^2}{k}bd\right]v_{\varsigma\iota} - \frac{\gamma^2}{k}b^2 v_{\varsigma\varsigma} = \frac{a}{\alpha}e^v(\gamma bv_\varsigma + [m+\gamma d]v_\iota). \tag{41}$$

Для того чтобы (41) имело канонический вид, необходимо, чтобы коэффициенты при смешанных производных обратились в нуль, тогда

$$\begin{cases} \alpha^2 kpc + \dfrac{\alpha}{2}pm = 0, \\ \dfrac{\gamma^2}{k}bd + \dfrac{\gamma}{2k}bm = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{m}{2\alpha k}, \\ d = -\dfrac{m}{2\gamma}, \end{cases}$$

а модули коэффициентов при вторых производных должны быть равны, т.е. $\alpha^2 kp^2 = \frac{\gamma^2}{k}b^2$, следовательно $p = \pm\frac{\gamma b}{\alpha k}$.

Подставив полученные значения в равенство (321), получим:

$$v_{\chi\chi} - v_{\varsigma\varsigma} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2 b^2}e^v\left(b\gamma v_\varsigma + \frac{m}{2}v_\iota\right). \tag{42}$$

Коэффициенты a, k, α, γ – параметры уравнения, а коэффициенты b, m – параметры преобразования, поэтому можно положить $b = 1$, а $m = 2$, и уравнение (42) примет вид (32), при этом преобразования координат имеют вид (33).

Замена (33) сводит уравнение (29) к параболическому типу (отсутствует вторая производная v_{ll}, но первая производная v_i входит в правую часть уравнения (32)).

СЛЕДСТВИЕ 1.

Уравнение (32) эквивалентно гиперболическому уравнению следующего вида

$$v_{\phi\varphi} = be^v(\gamma v_\phi - \gamma v_\varphi + v_\iota), \tag{43}$$

где $\dfrac{ak}{4\alpha\gamma^2} = b,\ v(\chi,\varsigma,\iota) = v(\phi,\varphi,\iota),\quad \phi = \chi + \varsigma,\quad \varphi = \chi - \varsigma,\quad \iota = \iota.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Доказательство сводится к выполнению замены переменных:

$v(\chi, \varsigma, l) = v(\phi, \varphi, l)$, $\phi = \chi + \varsigma$, $\varphi = \chi - \varsigma$, $l = l$.

СЛЕДСТВИЕ 2.

Уравнение (26), при условии $\beta = 0$ с помощью преобразования пространства:

$$u(x,y,t) = e^{v(\xi,\eta,\zeta)},\ \xi = \gamma t - \frac{\gamma}{\alpha k}x + y,\quad \eta = 5\gamma t - \frac{\gamma}{\alpha k}x - y,$$
$$\zeta = 3t - \frac{1}{\alpha k}x - \frac{1}{\gamma}y, \tag{44}$$

приводится к квазилинейному уравнению вида

$$v_{\eta\xi} + be^{v}[3\gamma v_\eta + v_\zeta + \gamma v_\xi] = 0 \tag{45}$$

где $b = -\dfrac{ak}{4\alpha\gamma^2}$, ξ,η,ζ – новые независимые переменные функции $v(\xi,\eta,\zeta)$.

Пара Лакса для уравнения (45)

Посмотрим, какой парой Лакса теперь будет обладать полученное уравнение (45). Для этого воспользуемся системой

$$L\varphi(x,y,t,\lambda) = \lambda\varphi(x,y,t,\lambda),$$
$$\varphi_t(x,y,t,\lambda) = -A\varphi(x,y,t,\lambda), \tag{46}$$

с операторами L, A вида (27), (28) соответственно (при $\beta=0$), и вектор-функцией $\varphi(x, y, t, \lambda) = (\varphi_1(x, y, t, \lambda), \varphi_2(x, y, t, \lambda))^T$ (T – транспонирование)

$$\alpha\varphi_{1x} + u_{11}\varphi_1 + u_{12}\varphi_2 = \lambda\varphi_1,$$
$$a\varphi_{1x} - \alpha\varphi_{2x} + u_{21}\varphi_1 + u_{22}\varphi_2 = \lambda\varphi_2, \tag{47}$$

$$\varphi_{1t} = -2\alpha k\varphi_{1x} - \gamma\varphi_{1y} - ku_{12}\varphi_2,$$
$$\varphi_{2t} = -ak\varphi_{1x} - \gamma\varphi_{2y} - v_{21}\varphi_1 - v_{22}\varphi_2, \tag{48}$$

где $v_{ij}(x, y, t)$, $v_{ij}(x, y, t)$ $(i, j = 1, 2)$ после замены $q(x, y, t) = 0$, $u(x, y, t) = e^{v(x,y,t)}$, $\beta = 0$ в (4.23), имеют вид:

$$v_{11}=0,\ v_{22}=v_t+\alpha k v_x,\quad v_{12}=ke^v,\quad v_{21}=\frac{a^2k}{4\alpha^2}e^v-\frac{a}{2\alpha}(v_t+\alpha k v_x),$$
$$u_{12}=e^v,\ u_{21}=\frac{a^2}{4\alpha^2}e^v+\frac{a\gamma}{2\alpha k}v_y,\ u_{11}=\frac{\gamma}{2k}v_y-\frac{\alpha}{2}v_x,\ u_{22}=-\frac{\gamma}{2k}v_y-\frac{\alpha}{2}v_x. \tag{49}$$

Выполним в системе (47), (48) замену переменных $(x,\ y,\ t) \to (\xi,\ \eta,\ \zeta)$: (44), тогда с учетом (341) ($j = 1,2$), получим

$$\varphi_{jy}=\varphi_{j\xi}-\varphi_{j\eta}-\frac{1}{\gamma}\varphi_{j\zeta},\quad \varphi_{jx}=-\frac{\gamma}{\alpha k}\varphi_{j\xi}-\frac{\gamma}{\alpha k}\varphi_{j\eta}-\frac{1}{\alpha k}\varphi_{j\zeta},$$
$$\varphi_{jt}=5\gamma\varphi_{j\eta}+\gamma\varphi_{j\xi}+3\varphi_{j\zeta}, \tag{50}$$

линейная система (47), (48) примет вид

$$-\gamma\varphi_{1\xi}-\gamma\varphi_{1\eta}-\varphi_{1\zeta}+ku_{11}\varphi_1+ku_{12}\varphi_2=\lambda k\varphi_1,$$
$$\gamma\varphi_{2\xi}+\gamma\varphi_{2\eta}+\varphi_{2\zeta}-\frac{a}{\alpha}\left(\gamma\varphi_{1\xi}+\gamma\varphi_{1\eta}+\varphi_{1\zeta}\right)+ku_{21}\varphi_1+ku_{22}\varphi_2=\lambda k\varphi_2, \tag{51}$$

$$2\gamma\varphi_{1\eta}=-ku_{12}\varphi_2,$$
$$4\gamma\varphi_{2\eta}+2\gamma\varphi_{2\xi}+2\varphi_{2\zeta}=\frac{a}{\alpha}\left(\gamma\varphi_{1\xi}+\gamma\varphi_{1\eta}+\varphi_{1\zeta}\right)-v_{21}\varphi_1-v_{22}\varphi_2, \tag{52}$$

где функциональные коэффициенты (49) преобразуются по этому же правилу

$$u_{11}=\frac{\gamma}{2k}v_y-\frac{\alpha}{2}v_x=\frac{\gamma}{k}v_\xi,\qquad u_{22}=-\frac{\gamma}{2k}v_y-\frac{\alpha}{2}v_x=\frac{\gamma}{k}\left(v_\eta+\frac{1}{\gamma}v_\zeta\right),$$
$$u_{12}=e^v,\quad u_{21}=\frac{a^2}{4\alpha^2}e^v+\frac{\gamma a}{2\alpha k}v_y=\frac{\gamma a}{2\alpha k}\left(v_\xi-v_\eta-\frac{1}{\gamma}v_\zeta\right)+\frac{a^2}{4\alpha^2}e^v. \tag{53}$$

$$v_{11}=0,\qquad v_{21}=\frac{a^2k}{4\alpha^2}e^v-\frac{a}{2\alpha}(\alpha k v_x+v_t)=\frac{a^2k}{4\alpha^2}e^v-\frac{a}{\alpha}(2\gamma v_\eta+v_\zeta),$$
$$v_{12}=ke^v,\quad v_{22}=\alpha k v_x+v_t=4\gamma v_\eta+2v_\zeta. \tag{54}$$

Так как система (52) является следствием уравнения $\varphi_t(x,\ y,\ t,\ \lambda) = -\mathrm{A}\varphi(x,\ y,\ t,\ \lambda)$, которое определяет динамику собственных функций оператора L по времени t, и в новой системе первое равенство содержит только дифференцирование по η, будем считать, что именно эта переменная играет роль координаты «времени». Следовательно, дифференцирование функций $\varphi_t(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ по этой переменной в системе (51) и правой части (52) не должно присутствовать, поэтому, используя равенства (52), выполним замену этих производных $\varphi_{1\eta}$, $\varphi_{2\eta}$ во всех равенствах системы (51), (52), тогда имеем

$$\begin{aligned}
&-\gamma\varphi_{1\xi}-\varphi_{1\zeta}+ku_{11}\varphi_1+\frac{3k}{2}u_{12}\varphi_2=\lambda k\varphi_1,\\
&\frac{1}{2}(\gamma\varphi_{2\xi}+\varphi_{2\zeta})-\frac{3a}{4\alpha}(\gamma\varphi_{1\xi}+\varphi_{1\zeta})+\left(ku_{21}-\frac{1}{4}v_{21}\right)\varphi_1+\left[\frac{3ka}{8\alpha}u_{12}+ku_{22}-\frac{1}{4}v_{22}\right]\varphi_2=\lambda k\varphi_2,
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma\varphi_{1\eta}=-\frac{k}{2}u_{12}\varphi_2,\\
&\gamma\varphi_{2\eta}=-\frac{1}{2}\gamma\varphi_{2\xi}-\frac{1}{2}\varphi_{2\zeta}+\frac{a}{4\alpha}\left(\gamma\varphi_{1\xi}+\varphi_{1\zeta}\right)-\frac{1}{4}v_{21}\varphi_1-\frac{1}{4}\left[v_{22}+\frac{ka}{2\alpha}u_{12}\right]\varphi_2,
\end{aligned} \tag{56}$$

Представим левую часть полученной системы (55) с операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\zeta}$ по переменным ξ, ξ в линейном виде:

$$L=B\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+U, \tag{57}$$

где B, U – матрицы 2 × 2 вида

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -\frac{3h}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}\gamma v_\xi & \frac{3}{2}ke^v\\ h\left(\gamma v_\xi-\frac{1}{2}v_\zeta\right)+\frac{3h^2k}{4}e^v & \frac{3kh}{4}e^v+\frac{1}{2}v_\zeta\end{pmatrix},\quad h=\frac{a}{2\alpha} \tag{58}$$

Представим систему (52) в виде

$$\begin{aligned}
&\varphi_{1\eta}=-\frac{k}{2\gamma}u_{12}\varphi_2,\\
&\varphi_{2\eta}=-\frac{1}{2}\varphi_{2\xi}-\frac{1}{2\gamma}\varphi_{2\zeta}+\frac{h}{2\gamma}\left(\gamma\varphi_{1\xi}+\varphi_{1\zeta}\right)-\frac{1}{4\gamma}\left(v_{21}\varphi_1+v_{22}\varphi_2+khu_{12}\varphi_2\right),
\end{aligned} \tag{59}$$

и в правой части выделим линейный оператор с матричными коэффициентами

$$A=D\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+V, \tag{60}$$

где

$$D=\frac{1}{2\gamma}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -h & 1\end{pmatrix},\quad V=\frac{1}{2\gamma}\begin{pmatrix}0 & ke^v\\ \frac{h^2k}{2}e^v-h(2\gamma v_\eta+v_\zeta) & \frac{kh}{2}e^v+2\gamma v_\eta+v_\zeta\end{pmatrix}. \tag{61}$$

Проведенные исследования дают возможность сформулировать следующую

ТЕОРЕМА 3. *Уравнение (45) имеет коммутационное представление $L_\eta = [L, A]$ с операторами L, A вида (57), (60).*

При классическом рассмотрении операторного уравнения Лакса (1.1), оператор L задается так, чтобы уравнение на собственные значения $L\varphi = \gamma\varphi$ являлось системой уравнений, в которой дифференцирование выполняется только по одной переменной, остальные переменные входят в связь параметрически. В полученной паре для уравнения (45) оператор L (57) содержит дифференцирование по двум переменным и, следовательно, даст систему уравнений в частных производных на собственные функции φ, что значительно усложнит анализ этого уравнения.

Выводы

В статье осуществлена идея построения 2 + 1 – мерной нелинейной модели типа диффузионной цепочки Тоды, основной особенностью которой является наличие нелинейности экспоненциального типа. Проведены следующие исследования:

1. Определены условия совместности системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Доказано, что полученное уравнение связано с операторной L, A – парой и уравнением Лакса, когда оператор L содержит дифференцирование только по одной переменной и параметрически зависит от двух дополнительных переменных, дифференцирование по которым входит в оператор A.
3. Использованы методика приведения линейной части к параболическому виду, а также преобразования координат приводящих к показательной нелинейности.
4. Построена операторная пара, соответствующая квазилинейному уравнению.

Библиографический список

1. Богоявленский О.И. Опрокидывающиеся солитоны в новых двумерных интегрируемых уравнениях // Изв. АН СССР Сер. матем. 1989.Т. 53. № 2. С. 243–258.
2. Санюк В.И. Топологические многомерные солитоны. Докторская диссертация. 1997.
3. Фаддеев Л. Д. Что мы знаем о солитонах в многомерном случае? Общеинститутский математический семинар Санкт-Петербургского отделения Математического института им.

В.А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=1420.
4. Редькина Т.В. Возможность построения солитонных 1 + 1 и 2 + 1-мерных уравнений, имеющих общую задачу рассеяния. // Вестник СГУ, № 43. Ставрополь, 2005. С. 47–52.
5. Есмаханова К.Р. Солитонные решения 2 + 1-мерного нелинейного уравнения Шредингера. Математический журнал. Алматы. 2007. Т. 7. №3 (25). С. 41–44.
6. Жестков С.В., Новошинская В. С. О существовании солитонных решений систем связанных 2 + 1-мерных уравнений Шредингера с керровской нелинейностью и степенными законами нелинейности, Доклады национальной академии наук Беларуси. Минск: Белорусская наука. Т. 54. № 3. 2010.

References

1. Bogoyavlensky O.I. Overturning solitons in new two-dimensional integrable equations, Izv. AN SSSR Ser. Math. 1989. T.53, No. 2. P. 243-258.
2. Sanyuk V.I. Topological multidimensional solitons. Doctoral dissertation. 1997.
3. Faddeev L.D. What do we know about solitons in the multidimensional case? General Mathematics Seminar of the St. Petersburg Branch of the Steklov Mathematical Institute. Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=1420.
4. Redkina T.V. The possibility of constructing soliton 1 + 1 and 2 + 1-dimensional equations having a common scattering problem. // Bulletin of the SSU, No. 43. Stavropol, 2005, p. 47-52.
5. Esmakhanova K.R. Soliton solutions of the 2 + 1-dimensional nonlinear Schrödinger equation. Mathematical Journal. Almaty. 2007. Volume 7. №3 (25). P. 41–44.
6. Zhestkov S.V. and Novoshinskaya V.S., The existence of soliton solutions of systems of coupled 2 + 1-dimensional Schrödinger equations with Kerr nonlinearity and power law of nonlinearity, Reports of the National Academy of Sciences of Belarus. Minsk, Belarus, vol. 54, 2010.