УДК 556.5

Батчаев М.И. [Batchaev M.I.],
Закинян Р.Г. [Zakinyan R.G.]

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАВОДКОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Mathematical model of floods with the distributed parameters

Хотя в целом картина формирования паводков ясна и понятно, что они в основном определяются интенсивностью и продолжительностью осадков над бассейном реки, но математического подхода, в рамках которого можно было спрогнозировать для конкретного бассейна момент наступления паводков с достаточной заблаговременностью, все еще нет. Это связано с наличием множества взаимозависимых факторов, влияющих на накопление влаги в бассейне реки. На наш взгляд, слабой стороной существующих математических моделей паводков является то, что они носят «накопительный» характер. Мы же рассматриваем паводок, как качественно новое состояние бассейна, как катастрофу. В работе получена новая математическая модель паводков с распределенными параметрами. Показано, что предложенная математическая модель описывает режим с обострением. Это значит, что за конечное время количество влаги в почве стремится к бесконечности, оставаясь локализованной в ограниченном объеме.Приток влаги происходит намного быстрее оттока и влага не успевает уйти за определенную границу и происходит накопление (локализация) влаги, что приводит к возникновению катастрофы, то есть к паводковым явлениям.

Though in general the picture of formation of floods is clear and it is clear that they generally are defined by intensity and duration of rainfall over a river basin, but there is no mathematical approach, within which it was possible to predict for the concrete pool, the moment of approach of floods with sufficient advance time, still In our opinion, weakness of the existing mathematical models of floods is that they have “accumulative” character. We consider a flood as qualitatively new condition of the pool as accident. In work the new mathematical model of floods with the distributed parameters is received. It is shown that the offered mathematical model describes the mode with an exacerbation. It means that for final time the amount of moisture in the soil strives for infinity. Inflow of moisture happens much quicker than outflow and moisture doesn’t manage to leave for a certain border and there is an accumulation (localization) of moisture that leads to accident emergence that is to the flood phenomena.

Ключевые слова: бассейн реки, приток, сток, паводок, водосбор, подземные воды.

Keywords: river basin, inflow, drain, flood, reservoir, underground waters.

Введение

В настоящее время проблема прогноза паводков является актуальной проблемой, как с научной, так и с практической точки зрения. Хотя в целом картина формирования паводков ясна и понятно, что они в основном определяются интенсивностью и продолжительностью осадков над бассейном реки, но математического подхода, в рамках которого можно было спрогнозировать для конкретного бассейна момент наступления паводков с достаточной заблаговременностью, все еще нет. Это связано с наличием множества взаимозависимых факторов, влияющих на накопление влаги в бассейне реки.

На наш взгляд, слабой стороной существующих математических моделей паводков является то, что они носят «накопительный» характер. Мы же рассматриваем паводок, как качественно новое состояние бассейна, как катастрофу. Поэтому нами в настоящей работе предлагается математическая модель паводков, в которой процесс накопления влагирассматривается, как «режим с обострением».

Материалы и методы исследования

Математическая модель с сосредоточенными параметрами

Начнемс анализамодели *HBV*. Эта модель, разработанная Бергстрёмом (Bergström, 1992, 1995) [3, 4] в Шведском метеорологическом и гидрологическом институте, представляет собой концептуальную модель водосбора, которая преобразует осадки, температуру воздуха и потенциальное суммарное испарение либо в снеготаяние, либо в сток или приток в водохранилище.

Модель описывает общий баланс воды следующим образом [1]:

$$P - E - Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(SP + SM + UZ + LZ + VL\right), \qquad (1)$$

где P – осадки,
E – суммарное испарение,
Q – сток,
SP – снежный покров,
SM – влажность почвы,
UZ – верхняя зона подземных вод,
LZ – нижняя зона подземных вод и
VL – объем озер.

В выражении (1) под P надо понимать не сами осадки, а интенсивность осадков. Соответственно, E – скорость испарения, а Q – скорость пополнения стока.

В действительности уравнение (1) выражает всего лишь баланс влаги. Оно не является кинематическим и не описывает динамику явления. Тем более, из него непосредственно не следует возникновение катастрофического явления, каковым являются паводки.

Немного видоизменив уравнение (1), можно свести его к виду, описывающему катастрофические явления. Действительно, так как в формуле (1) отражены основные составляющие баланса влаги, но можно предположить, что остались неизвестные нам составляющие баланса, то можно записать:

$$P - E - Q = A\left(SP + SM + UZ + LZ + VL\right)^{\alpha}, \tag{2}$$

где A и α находятся статистическими методами по данным наблюдений.

Из (1) и (2) следует

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(SP + SM + UZ + LZ + VL\right) = A\left(SP + SM + UZ + LZ + VL\right)^{\alpha}. \tag{3}$$

Уравнение (3) решается обычным способом. Мы для краткости изложения, согласно нашей основной концепции, остановим наше внимание только на одном, на наш взгляд важном параметре UZ. Тогда уравнение (3) запишется в виде:

$$\frac{\mathrm{d}UZ}{\mathrm{d}t} = AUZ^{\alpha}. \tag{4}$$

Решая это уравнение находим:

$$UZ^{\alpha-1} = \frac{1}{A(\alpha-1)(t_{\mathrm{c}} - t)}, \tag{5}$$

где

$$t_{\mathrm{c}} = \frac{1}{A(\alpha-1)UZ_0^{\alpha-1}}.$$

Запишем уравнение (5) в виде:

$$UZ = \frac{B}{\left(t_{\mathrm{c}} - t\right)^{1/(\alpha-1)}}, \tag{6}$$

где

$$B = \frac{1}{\left[A(\alpha-1)\right]^{1/(\alpha-1)}}. \tag{7}$$

Как видно из формулы (6), когда время $t = t_c$ запасы влаги в верхней зоне подземных вод $UZ \to \infty$. Поэтому время t_c – это время катастрофы. Термин катастрофа здесь применяется в широком смысле слова, как резкое увеличение искомой величины.

Конечно же, в реальности дело до бесконечности не доходит. Но так как мы создаем прогностическую модель, нам до катастрофы дело доводить не надо. Из предложенной модели можно получить следующую практическую рекомендацию. Если в результате мониторинга статистическими методами по данным наблюдений мы получили в модели (2) значение параметра $\alpha > 1$, *то катастрофа неизбежна*.

Результаты исследования и их обсуждение

Математическая модель с распределенными параметрами

Выше мы анализировали модель с сосредоточенными параметрами, постоянными для всего водосбора. В математическом смысле в этом случае водосбор представляется материальной точкой. Однако, имеются модели с распределенными параметрами. Они предназначены для более надежного описания природных гидрологических процессов и поэтому могут включать некоторые метеорологические переменные и параметры водосбора. Однако потенциал распределенных, физически обоснованных моделей до сих пор используется лишь частично (RefsgaardandAbbott, 1996) [6]. Это объясняется несколькими причинами. Модели с распределенными параметрами требуют большого количества данных, которые не всегда существуют или недоступны.

Европейская гидрологическая система (DHI, 1985) [5] является примером модели с распределенными параметрами. Блок, описывающий процесс задержания осадков растительностью в этой модели, позволяет определять интенсивность изменения количества влаги, задержанной поверхностью растительного покрова. Согласно модели Руттера указанную закономерность можно представить в виде [1]:

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = Q - K\left(c - S\right), \tag{8}$$

где c – слой воды, задержанной поверхностью растительного покрова; S – водоудерживающая способность растительного покрова; Q – интенсивность выпадения жидких осадков; K – фильтрационный параметр; t – время.

Найдем решение уравнения (8):

$$-\frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}\left[Q - K\left(c - S\right)\right]}{\mathrm{d}t} = Q - K\left(c - S\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}\left[Q - K\left(c - S\right)\right]}{Q - K\left(c - S\right)} = -K\mathrm{d}t,$$

$$\ln\left[Q - K\left(c - S\right)\right] = -Kt + \mathrm{const}.$$

Константу найдем из условия, что к началу наблюдения имелся начальный слой воды, задержанной поверхностью растительного покрова.

Тогда $$Q - K\left(c - S\right) = \left[Q - K\left(c_0 - S\right)\right]e^{-Kt},$$

$$Q\left(1 - e^{-Kt}\right) = K\left(c - c_0 e^{-Kt}\right) - KS\left(1 - e^{-Kt}\right),$$

$$c = c_0 e^{-Kt} + \left(\frac{Q}{K} + S\right)\left(1 - e^{-Kt}\right). \quad (9)$$

Отсюда следует, что с увеличением времени $t \to \infty$ слой воды, задержанной поверхностью растительного покрова, стремиться к предельному значению, равному:

$$c_{\max} = \frac{Q}{K} + S. \quad (10)$$

График зависимости (9) в условных единицах представлен на рисунке 1.

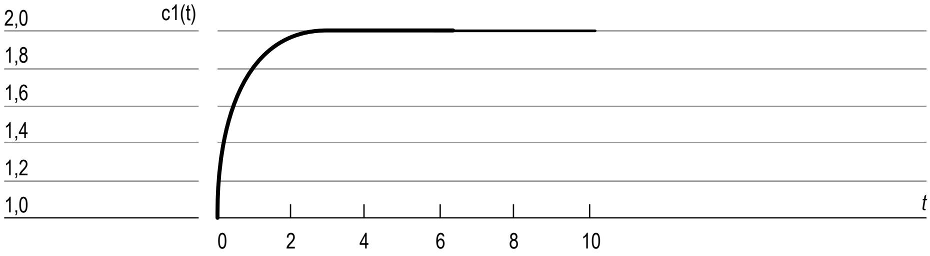

Рис. 1. **Изменение слоя воды, задержанной поверхностью растительного покрова, в модели Руттера [1].**

Как видно из проведенного анализа и рисунка модель Руттера не описывает катастрофу, в ней нет «режима обострения». Но в этой модели есть такое важное понятие, как водоудерживающая способность растительного покрова S, которая вместе с интенсивностью осадков и фильтрационными коэффициентами определяет максимальный слой воды, задержанной поверхностью растительного покрова $c_{\max}$.

Хотя в модели Руттера насыщение достигается за бесконечно большое время, она может быть полезна в практическом применении. Действительно, как только согласно модели слой воды приближается к состоянию насыщения и достигает порядка 80 % от максимального значения, то ясно, что дополнительные осадки могут вызвать катастрофические явления.

В самом общем виде процесс накопления влаги может быть описан с помощью уравнения Ричардса [1]:

$$c = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial K}{\partial z} + S, \quad (11)$$

где ψ – напор; t – переменная времени; z – вертикальная координата (положительное направление вверх); $c = \frac{\partial \Theta}{\partial \psi}$ – влагоемкость почвы; Θ – запас воды в почве; K – гидравлическая проводимость; S – источник и сток воды.

Как известно [2], решение уравнения типа (11) зависит от начальных и граничных условий. А они, в свою очередь, могут быть установлены только экспериментально или из общих концептуальных соображений. Поэтому модель (1) также не описывает катастрофу или режим с обострением. Использование этой модели позволяет определить количество прибывшей влаги к уже имеющемуся объему воды. Продолжая процедуру накопления, человек сам определяет, является ли полученный уровень накопленной воды критическим или нет.

Предложенную выше нашу модель с сосредоточенными параметрами рассмотрим в рамках модели с распределенными параметрами. Изменение влагоемкости в почве опишем нелинейным уравнением диффузии, которое является следствием закона сохранения массы:

$$\frac{\partial UZ}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k_0 UZ^{\sigma}\frac{\partial UZ}{\partial z}\right), \tag{12}$$

где UZ – влагоемкость верхней зоны подземных вод. Здесь коэффициент фильтрации является функцией от влагоемкости: $k = k_0UZ^{\sigma}$. Причем на границе $z = 0$, изменение этой величины описывается уравнением (6):

$$UZ(0,t)=\frac{B}{(t_c-t)^{1/(\alpha-1)}}. \tag{13}$$

Уравнение (12) с граничным условием (13) имеет решение [2]:

$$UZ(z,t)=\frac{B}{(t_c-t)^{1/(\alpha-1)}}f(\xi),$$

где ξ – автомодельная переменная, равная

$$\xi=\frac{z}{k_0^{1/2}B^{\sigma/2}(t_c-t)^{\frac{\alpha-1-\sigma}{2(\alpha-1)}}}. \tag{14}$$

Из (14) вытекает, что это автомодельное решение удовлетворяет краевой задаче с граничным условием (13) и начальным условием:

$$UZ(z,0)=\frac{B}{t_c^{1/(\alpha-1)}}f\left(\frac{z}{k_0^{1/2}B^{\sigma/2}t_c^{\frac{\alpha-1-\sigma}{2(\alpha-1)}}}\right). \tag{15}$$

В случае $\sigma = \alpha - 1$ решение имеет вид:

$$UZ(z,t)=\begin{cases}\dfrac{B}{(t_c-t)^{1/(\alpha-1)}}\left(1-\dfrac{z}{z_f}\right)^{2/(\alpha-1)}, & 0\le z\le z_f\\ 0, & z>z_f\end{cases}, \tag{16}$$

$$z_f = \sqrt{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1} k_0 B^{\alpha-1}}. \tag{17}$$

Из уравнения (16) следует, так называемый, эффект локализации. А именно, устанавливается такой режим притока и оттока влаги, что за конечное время t_c количество влаги стремится к бесконечности, но при этом граница перемещения влаги локализована в объеме $z \le z_f$.

График распространения влаги вглубь почвы с течением времени представлен на рисунке 2.

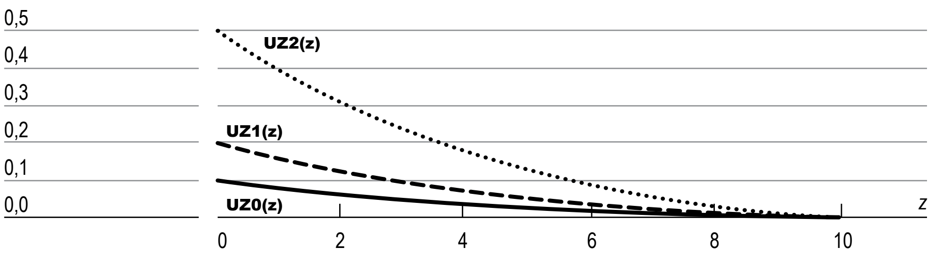

Рис. 2. **Локализация влаги в почве при режиме с обострением.**

Обсуждение результатов

Полученный выше результат можно сформулировать другими словами, а именно, когда имеет место режим с обострением, то приток влаги происходит намного быстрее оттока и влага не успевает уйти за определенную границу и происходит накопление (локализация)влаги, а это, в свою очередь, приводит к возникновению катастрофы, то есть к паводковым явлениям.

Для того чтобы указанную выше модель можно было реализовать на практике, необходима хорошая организация мониторинга бассейна реки.

Выводы

1. Предложена математическая модель паводка, рассматривающая процесс накопления влаги в бассейне реки, как режим с обострением.
2. Организация мониторинга за режимом осадков над территорией бассейна реки позволит определить необходимые параметры модели, по которым можно определить время наступления катастрофы.

Благодарности

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части государственного задания (задание №2014/216, проект 653).

Библиографический список

1. Руководство по гидрологической практике. Т. II. Управление водными ресурсами и практика применения гидрологических методов. ВМО №168. Шестое издание. 2012. 324 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ. 6-е издание. 1999. 799 с.
3. Bergström, S., 1992: The HBV model – its structure and applications. SMHI Reports RH, No. 4, Norrkping, Sweden.
4. Bergström, S., 1995: The HBV model. In Singh, V.P. (ed): Computer Models of Watershed Hydrology, Water Resources Publications. Colorado, United States, 443, 476.
5. DHI (Danish Hydraulic Institute), 1985: Introduction to the SHE-European Hydrologic System, Horsholm.
6. Refsgaard, J.C. and M.B. Abbott, 1996: The role of distributed modeling in water resources management. In: M.B. Abbott and J. Ch. Refsgaard, (eds.), 1996: Distributed Hydrological Modeling, Water Science and Technology Library, Vol. 22, Kluwer, Dordrecht.

References

1. Rukovodstvo po gidrologicheskoy praktike. Tom II. Upravleniye vodnymy resursami i praktika primeneniya gidrologicheskikh metodov (Guide to Hydrological Practice). VMO №168. Shestoye izdaniye. 2012. 324 s.
2. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki (Equations of mathematical physics). M.: Izd-vo MGU. 6-ye izdaniye. 1999. 799 s.
3. Bergström, S., 1992: The HBV model – its structure and applications. SMHI Reports RH, No. 4, Norrkping, Sweden.
4. Bergström, S., 1995: The HBV model. In Singh, V.P. (ed): Computer Models of Watershed Hydrology, Water Resources Publications. Colorado, United States, 443, 476.
5. DHI (Danish Hydraulic Institute), 1985: Introduction to the SHE-European Hydrologic System, Horsholm.
6. Refsgaard, J.C. and M.B. Abbott, 1996: The role of distributed modeling in water resources management. In: M.B. Abbott and J. Ch. Refsgaard, (eds.), 1996: Distributed Hydrological Modeling, Water Science and Technology Library, Vol. 22, Kluwer, Dordrecht.